Proceedings of IAM, V.4, N.2, 2015, pp.136-148

МЕТОД ПРОГОНКИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ТИПА РОССЕРА, ОПИСЫВАЮЩЕГО ДВИЖЕНИЕ В ТРУБОПРОВОДЕ*

Фикрет А. Алиев[1], Н.А Алиев[1]., А.П. Гулиев[1], М.Ф. Раджабов[2], Р.М. Тагиев[3]

[1]Институт Прикладной Математики, Бакинский Государственный Университет, Баку, Азербайджан
[2]Научно-исследовательский проектный институт ГНКАР НИПИ "Нефтегаз", Баку, Азербайджан
3Институт Математики и механики НАН Азербайджана, Баку, Азербайджан
e-mail: f_aliev@yahoo.com, tagiyev.reshad@gmail.com

Резюме. Рассматривается начальная задача для системы гиперболических уравнений, описывающих движение при добыче нефти газлифтным способом. Вводя новую переменную, являющуюся разностью давления и объема газа (или газожидкостной смеси (ГЖС)), умноженной на постоянную (балансирующую единицу измерений), исходная система уравнений приводится такому виду уравнений, которая после соответствующей дискретизации становится дискретным уравнением типа Россера. Разыскивая новую переменную как линейную функцию от объема газа (или ГЖС), показывается, что коэффициенты удовлетворяют двум разностным уравнениям первого порядка, одно из которых соответствует квадратному уравнению, а второе является линейным разностным уравнением первого порядка, коэффициенты которого зависят от решения первого. Для более частного случая, когда шаги разбиения по времени τ и по высоте скважины h стремятся к нулю, получено аналитическое выражение для коэффициентов прогонки в каждом точки области определения объема газа (или ГЖС) и давления. В случае, когда на устье объем подаваемого газа и движение (начальные условие) являются постоянными, то показывается, что результаты, полученные по модели Россера, совпадают с известными результатами, где для параметра балансирующей единицы измерений приводится конкретное аналитическое выражение.

Ключевые слова: газлифт, системы гиперболических уравнений, балансирующий параметр, дискретизация, модель Россера.

AMS Subject Classification: 35L02, 49J15.

1. Введение

Как известно [18] в разных стадиях при добыче нефти существуют многочисленные способы, где один из основных является газлифтный метод [7,8,16]. Существуют разные приемы для моделирование [8,16,17] и решение соответствующих уравнений возникающих при использование газлифта

---

* Работа была представлена на семинаре Института Прикладной Математики 23.10.2015

[10,14], где сначала усредняются исходное дифференциальное уравнение частных производных по времени или по координатах [9]. Далее исследуется решение соответствующих обыкновенных дифференциальных уравнений, ставятся задачи определение коэффициентов гидравлического сопротивление [2], образование ГЖС и др. [3]. Отметим, что эти задачи на счет осреднений являются приближенными и полученные е результаты вообще не адекватны для исходной задачи. Поэтому естественным является исследовать исходную задачи, где уже движение описывается гиперболическим уравнениям первого порядка. С другой стороны в газлифтном способе на кольцевом пространстве и подъемнике движения описываются с уравнениями частных производных, а на пласте движение описывается конечно-разностным уравнением. Поэтому, имеет смысл дискретизировать эти уравнения частных производных и далее общую системы уравнений частных производных для газлифтного процесса – описывать конечно разностном уравнением. Выполняя эти процедур показывается, общие системы уравнений можно привести к целесообразному ищу который можно использовать модели Россера [4,5,13]. Далее этих разностных уравнений Россера [5] предлагается метод прогонки гораздо облегчающий нахождение приближенных решений исходных гиперболических уравнений совпадающих с известным решением более достаточной точности.

2. Постановка задачи. Уравнения типа Россера в непрерывном случае

Рассматривается задачи Коши для система дифференциальных уравнений гиперболического типа первого порядка

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P(x,t)}{\partial x} = -\dfrac{c}{F}\cdot\dfrac{\partial Q(x,t)}{\partial t}, \\ \dfrac{\partial Q(x,t)}{\partial x} = -F\,\dfrac{\partial P(x,t)}{\partial t} - 2aQ(x,t), \quad x\in R,\ t>0, \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} &P(x,0) = P_o(x), \\ &Q(x,0) = Q_0(x),\ x\in R, \end{aligned} \tag{2}$$

где для применяемости схем Россера [5] к уравнению (1) граничным условиям (2) приведем следующую замену. Из (3) α-параметр, балансирующий единицы измерений между P и Q.

$$P(x,t) = R(x,t) + \alpha\, Q(x,t). \tag{3}$$

Тогда система (1) можем написать в виде:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial R(x,t)}{\partial x} = -\alpha \dfrac{\partial Q(x,t)}{\partial x} - \dfrac{c}{F} \cdot \dfrac{\partial Q(x,t)}{\partial t}, \\ \dfrac{\partial Q(x,t)}{\partial x} = -F\left[\dfrac{\partial R(x,t)}{\partial t} + \alpha \dfrac{\partial Q(x,t)}{\partial t}\right] - 2aQ(x,t), \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \dfrac{\partial R(x,t)}{\partial x} + \alpha \dfrac{\partial Q(x,t)}{\partial x} = -\dfrac{c}{F} \cdot \dfrac{\partial Q(x,t)}{\partial t}, \\ \dfrac{\partial Q(x,t)}{\partial t} = -\dfrac{1}{F\alpha}\dfrac{\partial Q(x,t)}{\partial x} - \dfrac{1}{\alpha}\dfrac{\partial R(x,t)}{\partial t} - \dfrac{2a}{F\alpha}Q(x,t). \end{cases} \tag{4}$$

Теперь учитывая второе уравнение системе (4) в первом имеем:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial R(x,t)}{\partial x} = -\alpha \dfrac{\partial Q(x,t)}{\partial x} - \dfrac{c}{F}\left[-\dfrac{1}{F\alpha}\dfrac{\partial Q(x,t)}{\partial x} - \dfrac{1}{\alpha}\dfrac{\partial R(x,t)}{\partial t} - \dfrac{2a}{F\alpha}Q(x,t)\right], \\ \dfrac{\partial Q(x,t)}{\partial t} = -\dfrac{1}{F\alpha}\dfrac{\partial Q(x,t)}{\partial x} - \dfrac{1}{\alpha}\dfrac{\partial R(x,t)}{\partial t} - \dfrac{2a}{F\alpha}Q(x,t), \end{cases}$$

или же после группировки, получим:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial R(x,t)}{\partial x} = \left(\dfrac{c}{F^2\alpha} - \alpha\right)\dfrac{\partial Q(x,t)}{\partial x} + \dfrac{c}{F\alpha}\dfrac{\partial R(x,t)}{\partial t} + \dfrac{2ac}{F^2\alpha}Q(x,t), \\ \dfrac{\partial Q(x,t)}{\partial t} = -\dfrac{1}{F\alpha}\dfrac{\partial Q(x,t)}{\partial x} - \dfrac{1}{\alpha}\dfrac{\partial R(x,t)}{\partial t} - \dfrac{2a}{F\alpha}Q(x,t). \end{cases} \tag{5}$$

Примем обозначение

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q(x,t)}{\partial x} = W(x,t), \\ \dfrac{\partial R(x,t)}{\partial t} = \chi(x,t), \;\; x \in R,\; t > 0. \end{cases} \tag{6}$$

Из системы (5)-(6) имеем:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial R(x,t)}{\partial x} = \left(\dfrac{c}{F^2\alpha} - \alpha\right)W(x,t) + \dfrac{c}{F\alpha}\chi(x,t) + \dfrac{2ac}{F^3\alpha}Q(x,t) \\ \dfrac{\partial Q(x,t)}{\partial t} = -\dfrac{1}{F\alpha}W(x,t) - \dfrac{1}{\alpha}\chi(x,t) - \dfrac{2a}{F\alpha}Q(x,t), \; x \in R,\; t > 0. \end{cases} \tag{7}$$

Таким образом получена два система типа Россера (6) и (7)

3. Метод дискретизация и дискретное уравнение Россера

Для система (6) и (7) приведем следующий дискретизация.

$$Q(x_i,t_i)=Q_i^j\,, R(x_i,t_i)=R_i^j\,, x_i=ih,\ t_j=j\tau\ .$$

$$\begin{cases}\dfrac{Q_{i+1}^j-Q_i^j}{h}=W_i^j\,,\\ \dfrac{R_i^{j+1}-R_i^j}{\tau}=\chi_i^j\,,\end{cases}\tag{8}$$

$$\begin{cases}\dfrac{R_{i+1}^j-R_i^j}{h}=\left(\dfrac{c}{F^2\alpha}-\alpha\right)W_i^j+\dfrac{c}{F\alpha}\chi_i^j+\dfrac{2ac}{F^2\alpha}Q_i^j\,,\\ \dfrac{Q_i^{j+1}-Q_i^j}{\tau}=\dfrac{-1}{F\alpha}W_i^j-\dfrac{1}{\alpha}\chi_i^j-\dfrac{2a}{F\alpha}Q_i^j\,,\end{cases}\tag{9}$$

или

$$\begin{cases}Q_{i+1}^j=Q_i^j+hW_i^j\,,\\ R_i^{j+1}=R_i^j+\tau\chi_i^j\,,\end{cases}\tag{10}$$

$$\begin{cases}R_{i+1}^j=R_i^j+\left(\dfrac{ch}{F^2\alpha}-\alpha h\right)W_i^j+\dfrac{ch}{F\alpha}\chi_i^j+\dfrac{2ach}{F^2\alpha}Q_i^j\,,\\ Q_i^{j+1}=Q_i^j-\dfrac{\tau}{F\alpha}W_i^j-\dfrac{\tau}{\alpha}\chi_i^j-\dfrac{2a\tau}{F\alpha}Q_i^j\,.\end{cases}\tag{11}$$

Наконец, в (9)-(11)приведем следующую замену [1,6,11,12,]

$$R_i^j=S_i^jQ_i^j+K_i^j\quad ,\tag{12}$$

тогда системы (10) и (11) примут вид: (дискретные уравнение типа Россера

$$\begin{cases}Q_{i+1}^j=Q_i^j+hW_i^j\,,\\ S_i^{j+1}Q_i^{j+1}+K_i^{j+1}=S_i^jQ_i^j+K_i^j+\tau\chi_i^j\,,\end{cases}\tag{13}$$

$$\begin{cases}S_{i+1}^jQ_{i+1}^j+K_{i+1}^j=S_i^jQ_i^j+K_i^j+\left(\dfrac{ch}{F^2\alpha}-\alpha h\right)W_i^j+\dfrac{ch}{F\alpha}\chi_i^j+\dfrac{2ach}{F^2\alpha}Q_i^j\,,\\ Q_i^{j+1}=Q_i^j-\dfrac{\tau}{F\alpha}W_i^j-\dfrac{\tau}{\alpha}\chi_i^j-\dfrac{2a\tau}{F\alpha}Q_i^j\,.\end{cases}\tag{14}$$

Отметим, что W_i^j определяется из первого уравнение системы (8), а χ_i^j из второго уравнение (13) получается в виде

$$\chi_i^j=\frac{S_i^{j+1}Q_i^{j+1}+K_i^{j+1}-S_i^jQ_i^j-K_i^j}{\tau}\ ,$$

и подставляя их в систему уравнений (14) получим:

$$\begin{cases} S_{i+1}^{j}Q_{i+1}^{j}+K_{i+1}^{j}=S_{i}^{j}Q_{i}^{j}+K_{i}^{j}+\left(\dfrac{ch}{F^{2}\alpha}-\alpha h\right)\dfrac{Q_{i+1}^{j}-Q_{i}^{j}}{h}+ \\ +\dfrac{ch}{F\alpha}\dfrac{S_{i}^{j+1}Q_{i}^{j+1}+K_{i}^{j+1}-S_{i}^{j}Q_{i}^{j}-K_{i}^{j}}{\tau}+\dfrac{2ach}{F^{2}\alpha}Q_{i}^{j}, \\ Q_{i}^{j+1}=Q_{i}^{j}-\dfrac{\tau}{F\alpha}\dfrac{Q_{i+1}^{j}-Q_{i}^{j}}{h}-\dfrac{\tau}{\alpha}\dfrac{S_{i}^{j+1}Q_{i}^{j+1}+K_{i}^{j+1}-S_{i}^{j}Q_{i}^{j}-K_{i}^{j}}{\tau}-\dfrac{2a\tau}{F\alpha}Q_{i}^{j}, \end{cases}$$

которая после группировка по Q имеет вид:

$$\begin{cases} \left(S_{i+1}^{j}-\dfrac{c}{F^{2}\alpha}+\alpha\right)Q_{i+1}^{j}-\dfrac{ch}{F\alpha\tau}S_{i}^{j+1}Q_{i}^{j+1}=\left(S_{i}^{j}-\dfrac{c}{F^{2}\alpha}+\alpha-\dfrac{ch}{F\alpha\tau}S_{i}^{j}+\dfrac{2ach}{F^{2}\alpha}\right)Q_{i}^{j}- \\ -K_{i+1}^{j}+K_{i}^{j}+\dfrac{ch}{F\alpha\tau}K_{i}^{j+1}-\dfrac{ch}{F\alpha\tau}K_{i}^{j}, \\ \left(1+\dfrac{1}{\alpha}S_{i}^{j+1}\right)Q_{i}^{j+1}+\dfrac{\tau}{F\alpha h}Q_{i+1}^{j}=\left(1+\dfrac{\tau}{F\alpha h}+\dfrac{1}{\alpha}S_{i}^{j}-\dfrac{2a\tau}{F\alpha}\right)Q_{i}^{j}-\dfrac{1}{\alpha}K_{i}^{j+1}+\dfrac{1}{\alpha}K_{i}^{j}. \end{cases} \tag{15}$$

4. Определение $S_i^j, K_i^j, Q_i^j, P_i^j$ с точности до $O(\tau)$ при $\tau = h$

Теперь учитывая соотношение

$$Q_{i+1}^{j}+Q_{i}^{j+1}=2Q_{i}^{j} \tag{16}$$

которая справедливо с точностью h и τ первой степени т.е. $O(\tau)$ и $O(h)$, из (15) получим:

$$\begin{cases} \left(S_{i+1}^{j}-\dfrac{c}{F^{2}\alpha}+\alpha\right)2Q_{i}^{j}-\left(S_{i+1}^{j}-\dfrac{c}{F^{2}\alpha}+\alpha\right)Q_{i}^{j+1}-\dfrac{c}{F\alpha}S_{i}^{j+1}Q_{i}^{j+1}= \\ \left(S_{i}^{j}-\dfrac{c}{F^{2}\alpha}+\alpha-\dfrac{c}{F\alpha}S_{i}^{j}+\dfrac{2ach}{F^{2}\alpha}\right)Q_{i}^{j}-K_{i+1}^{j}+K_{i}^{j}+\dfrac{c}{F\alpha}K_{i}^{j+1}-\dfrac{c}{F\alpha}K_{i}^{j}, \\ \left(1+\dfrac{1}{\alpha}S_{i}^{j+1}\right)Q_{i}^{j+1}+\dfrac{1}{F\alpha}2Q_{i}^{j}-\dfrac{1}{F\alpha}Q_{i}^{j+1}= \\ =\left(1+\dfrac{1}{F\alpha}+\dfrac{1}{\alpha}S_{i}^{j}-\dfrac{2a\tau}{F\alpha}\right)Q_{i}^{j}-\dfrac{1}{\alpha}K_{i}^{j+1}+\dfrac{1}{\alpha}K_{i}^{j}, \end{cases}$$

где после соответствующие группировки последняя система имеет вид:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{c}{F^2\alpha} - S_{i+1}^j - \alpha - \dfrac{c}{F\alpha}S_i^{j+1}\right)Q_i^{j+1} = \\ = \left(S_i^j - \dfrac{c}{F^2\alpha} + \alpha - \dfrac{c}{F\alpha}S_i^j + \dfrac{2ach}{F^2\alpha} - 2S_{i+1}^j + \dfrac{2c}{F^2\alpha} - 2\alpha\right)Q_i^j - \\ - K_{i+1}^j + K_i^j + \dfrac{c}{F\alpha}K_i^{j+1} - \dfrac{c}{F\alpha}K_i^j, \\ \left(1 + \dfrac{1}{\alpha}S_i^{j+1} - \dfrac{1}{F\alpha}\right)Q_i^{j+1} = \left(1 + \dfrac{1}{F\alpha} + \dfrac{1}{\alpha}S_i^j - \dfrac{2a\tau}{F\alpha} - \dfrac{2}{F\alpha}\right)Q_i^j - \dfrac{1}{\alpha}K_i^{j+1} + \dfrac{1}{\alpha}K_i^j. \end{cases} \tag{17}$$

Наконец определяем Q_i^{j+1} из второго уравнению система (17) и подставляя его к первому выражению из (17) получим:

$$\begin{cases} \left[\left(\dfrac{c}{F^2\alpha} - S_{i+1}^j - \alpha - \dfrac{c}{F\alpha}S_i^{j+1}\right) \cdot \dfrac{1 - \dfrac{1}{F\alpha} + \dfrac{1}{\alpha}S_i^j - \dfrac{2\tau a}{F\alpha}}{1 - \dfrac{1}{F\alpha} + \dfrac{1}{\alpha}S_i^{j+1}} - \right. \\ \left. - \left(S_i^j - \dfrac{c}{F\alpha}S_i^j + \dfrac{2ach}{F^2\alpha} - 2S_{i+1}^j + \dfrac{c}{F^2\alpha} - \alpha\right)\right]Q_i^j = \\ = -K_{i+1}^j + K_i^j + \dfrac{c}{F\alpha}K_i^{j+1} - \dfrac{c}{F\alpha}K_i^j - \\ - \left(\dfrac{c}{F^2\alpha} - S_{i+1}^j - \alpha - \dfrac{c}{F\alpha}S_i^{j+1}\right) \cdot \dfrac{K_i^j - K_i^{j+1}}{\alpha - \dfrac{1}{F} + S_i^{j+1}}. \end{cases} \tag{18}$$

Учитывая, что (18) выполняется независимо от Q_i^j, то коэффициент Q_i^j обращаются в нулю, т.е.

$$\begin{aligned} & S_{i+1}^j - \frac{1}{F\alpha}S_{i+1}^j - \frac{1}{\alpha}S_i^j S_{i+1}^j + \frac{2a\tau}{F\alpha}S_{i+1}^j - 2S_i^j + \\ & + \frac{2a\tau}{F} - \frac{c}{F\alpha}S_i^{j+1} + \frac{1}{F\alpha}S_i^j - \frac{1}{\alpha}S_i^j S_i^{j+1} + \\ & + \frac{c}{F\alpha}S_i^j - \frac{2ach}{F^2\alpha} + \frac{2}{\alpha}S_i^{j+1}S_{i+1}^j + S_i^{j+1} = 0 \end{aligned} \tag{19}$$

и

$$\begin{aligned} & -\alpha K_{i+1}^j + 2\alpha K_i^j + \frac{c}{F}K_i^{j+1} - \frac{c}{F}K_i^j + \frac{1}{F}K_{i+1}^j - \frac{1}{F}K_i^j - S_i^{j+1}K_{i+1}^j + S_i^{j+1}K_i^j + \\ & + S_{i+1}^j K_i^j - S_{i+1}^j K_i^{j+1} - \alpha K_i^{j+1} = 0. \end{aligned} \tag{20}$$

Таким образом после несложных преобразований (19) принимает вид:

$$-\frac{c}{F\alpha}S_i^{j+1}-\frac{1}{F\alpha}S_{i+1}^j-\frac{1}{\alpha}S_i^j(S_i^{j+1}+S_{i+1}^j)-2S_i^j+(S_i^{j+1}+S_{i+1}^j)+$$
$$+\frac{2a\tau}{F\alpha}S_{i+1}^j+\frac{2a\tau}{F}+\frac{c}{F\alpha}S_i^j-\frac{2ach}{F^2\alpha}+\frac{1}{F\alpha}S_i^j+\frac{2}{\alpha}S_i^{j+1}S_{i+1}^j=0.$$

Учитывая равенства подобно к (16) для S_i^j

$$S_{i+1}^j+S_i^{j+1}=2S_i^j \tag{21}$$

из последнего получим:

$$-\frac{c}{F\alpha}(S_i^{j+1}-S_i^j)-\frac{1}{F\alpha}S_i^j+\frac{1}{F\alpha}S_i^{j+1}-\frac{2}{\alpha}S_i^{j2}+$$
$$+\frac{4a\tau}{F\alpha}S_i^j-\frac{2a\tau}{F\alpha}S_i^{j+1}+\frac{2a\tau}{F}-\frac{2ach}{F^2\alpha}+\frac{4}{\alpha}S_i^{j+1}S_i^j-\frac{2}{\alpha}\left(S_i^{j+1}\right)^2=0$$

или же

$$-\frac{2}{\alpha}(S_i^{j+1}-S_i^j)^2-\frac{c}{F\alpha}(S_i^{j+1}-S_i^j)+\frac{1}{F\alpha}(S_i^{j+1}-S_i^j)+$$
$$+\frac{4a\tau}{F\alpha}S_i^j-\frac{2a\tau}{F\alpha}S_i^{j+1}+\frac{2a\tau}{F}-\frac{2ach}{F^2\alpha}=0.$$

Таким образом для определения S_i^j приходим к следующему квадратному уравнению

$$\begin{gathered}-\frac{2}{\alpha}(S_i^{j+1}-S_i^j)^2-\left(\frac{c}{F\alpha}-\frac{1}{F\alpha}+\frac{2a\tau}{F\alpha}\right)\left(S_i^{j+1}-S_i^j\right)+\\+\left(\frac{2a\tau}{F}-\frac{2ach}{F^2\alpha}+\frac{2a\tau}{F\alpha}S_i^j\right)=0,\end{gathered} \tag{22}$$

решения которого (22) представим в виде:

$$S_i^{j+1}-S_i^j=\frac{\frac{c}{F\alpha}-\frac{1}{F\alpha}+\frac{2a\tau}{F\alpha}\pm\sqrt{\left(\frac{c}{F\alpha}-\frac{1}{F\alpha}+\frac{2a\tau}{F\alpha}\right)^2+\frac{8}{\alpha}\left(\frac{2a\tau}{F}-\frac{2ach}{F^2\alpha}+\frac{2a\tau}{F\alpha}S_i^j\right)}}{-\frac{4}{\alpha}}. \tag{23}$$

Для тогда чтобы (23) имеем смысле в $\pm$ нужно взять знак “-”. Тогда из (23) имеем:

$$S_i^{j+1}=S_i^j+\frac{1}{4}\sqrt{\left(\frac{c}{F}-\frac{1}{F}+\frac{2a\tau}{F}\right)^2+\frac{16a}{F}\left(\alpha\tau-\frac{ch}{F}+\tau S_i^j\right)}-\frac{1}{4F}\left(c+2a\tau-1\right). \tag{24}$$

Подобно к (21) учитывая

$$K_{i+1}^j+K_i^{j+1}=2K_i^j, \tag{25}$$

из (20) имеем:

$$\frac{c}{F}\left(K_i^{j+1}-K_i^j\right)+\frac{1}{F}K_i^j-\frac{1}{F}K_i^{j+1}-2S_i^{j+1}K_i^j+2S_i^{j+1}K_i^{j+1}+2K_i^jS_i^j-2K_i^{j+1}S_i^j=0.$$

или

$$\frac{c}{F}\left(K_i^{j+1}-K_i^j\right)-\frac{1}{F}\left(K_i^{j+1}-K_i^j\right)+2S_i^{j+1}\left(K_i^{j+1}-K_i^j\right)-2S_i^j\left(K_i^{j+1}-K_i^j\right)=0$$

или же

$$\left(\frac{c}{F}-\frac{1}{F}+2S_i^{j+1}-2S_i^j\right)\left(K_i^{j+1}-K_i^j\right)=0. \tag{26}$$

Как видно из (23)

$$2\left(S_i^{j+1}-S_i^j\right)+\frac{c}{F}-\frac{1}{F}\neq 0, \tag{27}$$

тогда из (26), (27) имеем:

$$K_i^{j+1}=K_i^j. \tag{28}$$

Из (28) следует, что K_i^j не зависит от j т.е. $K(x,t)$ не зависит от t.

$$K(x,t)\equiv K_0(x). \tag{29}$$

Возвращаясь к (25) легко видеть, что если известно S_i^0, то можно определить все S_i^j.

Как видно из (3)

$$R(x,0)=P(x,0)-\alpha Q(x,0)=P_0(x)-\alpha Q_0(x) \tag{30}$$

т.е. из (30) имеем

$$R_i^0=P_i^0-\alpha Q_i^0, \tag{31}$$

а из (29) получим

$$K_i^j=K_i^0. \tag{32}$$

Тогда из (12) находим:

$$S_i^0=\frac{R_i^0-K_i^0}{Q_i^0}=\frac{P_i^0-\alpha Q_i^0-K_i^0}{Q_i^0}. \tag{33}$$

Если взят

$$K_i^0=0,$$

То из (31)-(33) имеем

$$K_i^j\equiv 0, \tag{34}$$

и

$$S_i^0=\frac{P_i^0}{Q_i^0}-\alpha.$$

Далее учитывая (34) из второго уравнения системы (17) имеем:

$$Q_i^{j+1} = \frac{1 - \frac{1}{F\alpha} + \frac{1}{\alpha} S_i^j - \frac{2a\tau}{F\alpha}}{1 - \frac{1}{F\alpha} + \frac{1}{\alpha} S_i^{j+1}} Q_i^j,$$

а из (12) находим:

$$R_i^j = S_i^j \frac{1 - \frac{1}{F\alpha} + \frac{1}{\alpha} S_i^{j-1} - \frac{2a\tau}{F\alpha}}{1 - \frac{1}{F\alpha} + \frac{1}{\alpha} S_i^j} Q_i^{j-1}.$$

Наконец P_i^j определяется из дискретизации (3)

$$P_i^j = R_i^j + \alpha Q_i^j = S_i^j \frac{1 - \frac{1}{F\alpha} + \frac{1}{\alpha} S_i^{j-1} - \frac{2a\tau}{F\alpha}}{1 - \frac{1}{F\alpha} + \frac{1}{\alpha} S_i^j} Q_i^{j-1} + \alpha \frac{1 - \frac{1}{F\alpha} + \frac{1}{\alpha} S_i^{j-1} - \frac{2a\tau}{F\alpha}}{1 - \frac{1}{F\alpha} + \frac{1}{\alpha} S_i^j} Q_i^{j-1}$$

$$P(x,t) = S(x,t)Q(x,t) + \alpha Q(x,t) = (\alpha + S)Q.$$

Теперь вычислим приближение квадратичное корен входящего в (24) , т.е.

$$\sqrt{\left(\frac{c}{F} - \frac{1}{F} + \frac{2a\tau}{F}\right)^2 + \frac{16a}{F}\left(\alpha\tau - \frac{ch}{F} + \tau S_i^j\right)} \approx \left(\frac{c}{F} - \frac{1}{F} + \frac{2a\tau}{F}\right) + \frac{8a}{F} \frac{\alpha\tau - \frac{ch}{F} + \tau S_i^j}{\frac{c}{F} - \frac{1}{F} + \frac{2a\tau}{F}}.$$

Тогда из (24) получим:

$$S_i^{j+1} = S_i^j + \frac{2a}{F} \frac{\alpha\tau - \frac{ch}{F} + \tau S_i^j}{\frac{c}{F} - \frac{1}{F} + \frac{2a\tau}{F}} = \left(1 + \frac{2\tau a}{c + 2a\tau - 1}\right) S_i^j + \frac{2a}{F} \frac{\alpha\tau - \frac{ch}{F}}{-\frac{1}{F} + \frac{2a\tau}{F} + \frac{c}{F}}$$

или же

$$S_i^{j+1} = S_i^j + 2a \frac{\alpha\tau - \frac{ch}{F} + \tau S_i^j}{c + 2a\tau - 1} = \frac{cS_i^j - S_i^j + 2a\tau S_i^j + 2a\tau\alpha - \frac{2ach}{F} + 2a\tau S_i^j}{c + 2a\tau - 1},$$

т.е.

$$S_i^{j+1} = \frac{cS_i^j - S_i^j + 4ahS_i^j + 2a\alpha h - \frac{2ac\tau}{F}}{c - 1 + 2a\tau}.$$

Пример.

Рассмотрим следующий пример, когда начальное условие для S постоянной и $\tau = h$ т.е. и S_i^j из (4) имеет вид

$$S_i^0 = const = S,$$

$$S_i^1 = S + 2a\frac{\left(\alpha - \frac{c}{F} + S\right)\tau}{c - 1 + 2a\tau}.$$

Точно так же

$$Q_i^1 = \frac{\left(1 - \frac{1}{F\alpha} + \frac{1}{\alpha}S\right)Q_i^0}{1 - \frac{1}{F\alpha} + \frac{1}{\alpha}S_i^1} - \frac{\frac{2a}{F\alpha}Q_i^0}{1 - \frac{1}{F\alpha} + \frac{1}{\alpha}S_i^1}\tau .$$

Подобно к Q_i^1 для P_i^1 имеем:

$$P_i^1 = S_i^1\frac{1 - \frac{1}{F\alpha} + \frac{1}{\alpha}S_i^0 - \frac{2a\tau}{F\alpha}}{1 - \frac{1}{F\alpha} + \frac{1}{\alpha}S_i^1}Q_i^0 + \alpha\frac{1 - \frac{1}{F\alpha} + \frac{1}{\alpha}S_i^0 - \frac{2a\tau}{F\alpha}}{1 - \frac{1}{F\alpha} + \frac{1}{\alpha}S_i^1}Q_i^0.$$

Таким образом ограничивая первое слагаемое формула Тейлора имеем:

$$S_i^1 = S + 2a\left.\frac{\left(\alpha - \frac{c}{F} + S\right)(c - 1 + 2a\tau) - \left(\alpha - \frac{c}{F} + S\right)\tau 2a}{\left(c - 1 + 2a\tau\right)^2}\right|_{\tau=0}\tau = .$$

$$= S + 2a\frac{\left(\alpha - \frac{c}{F} + S\right)(c-1)}{(c-1)^2}\tau$$

С учетом выражения S_i^1 для P_i^1 получаем:

$$P_i^1 = P_0 + \alpha Q_0 + \left[\frac{2a\left(\alpha - \frac{c}{F} + S\right)\left(1 - \frac{1}{F\alpha} + \frac{1}{\alpha}S\right) - S(c-1)\left(\frac{2a}{F\alpha} + \frac{S}{\alpha}\right)}{(c-1)\left(1 - \frac{1}{F\alpha} + \frac{S}{\alpha}\right)} - (c-1)\frac{2a}{F\alpha}\right]Q\tau$$

Учитывая что, новая схема $S + \alpha$ совпадает с S из старой схемы в выражении P_0^1, тогда α подбираем следующим образом [6]:

$$\frac{2a\left(\alpha - \frac{c}{F} + S\right)\left(1 - \frac{1}{F\alpha} + \frac{1}{\alpha}S\right) - S(c-1)\left(\frac{2a}{F\alpha} + \frac{S}{\alpha}\right) - \frac{2a}{F\alpha}(c-1)}{(c-1)\left(1 - \frac{1}{F\alpha} + \frac{S}{\alpha}\right)} = -\frac{2a}{F\alpha}.$$

А это выражение дает нам определит α из следующий уравнений

$$\frac{2a\left(F\alpha - c + SF\right)\left(F\alpha - 1 + SF\right) - SF(c-1)(2a+FS) - 2aF(c-1)}{F\left(c-1\right)\left(F\alpha - 1 + SF\right)} = -\frac{2a}{F\alpha},$$

или же

$$\begin{aligned}&2aF^3\alpha^3 - \left(2aF^2 - 4aF^3S + 2aF^2c\right)\alpha^2 + \\ &+ \left(2acF - 4aF^2Sc + 2aF^3S^2 - F^3Sc - F^3S^2 + 4aF^2c\right)\alpha - \\ &- \left(2aFc - 2aF^2Sc - 2aF + 2aF^2S\right) = 0.\end{aligned}$$

Полученные уравнения третий степени с вещественными коэффициентами имеет всегда хотя бы одного действительного корня и для его нахождения можно использовать, формула Кардано [15].

5. Заключение

Таким образом, здесь приводится дискретный модель Россера для система гиперболических уравнения описывающих движение в газлифтном процессе. В первые приводится метод прогонки для дискретного уравнение Россера. На простом примере приводится эффективности предложено алгоритма.

Литература

1. Aliev F.A., Ismailov N.A., Temirbekova L.N., Extremal solution of the problem of the choice of optimum modes for gas-lift process, Appl.Comput.Math., Vol.11, No.3, 2012, pp.348-357.
2. Aliev F.A., Ismailov N.A., Namazov A.A., Asymptotic method for finding the coefficient of hydraulic resistance in lifting of fluid on tubing, Journal of Inverse and ill posed problems, Vol. 23, Issue 5, 2015. Pages 511-518.
3. Apostolyuk A.S., Larin V.B., Updating of linear stationary dynamic system parameters Appl. Comput. Math., Vol.10, №3, 2011, pp.402-408.
4. Roesser R., A discrete state space model for linear image processing, IEEE Trans. Autom. Contr., Vol.AC-20, No.1, 1975.
5. Алиев Н.А., Алиев Ф.А., Муталлимов М.М., Тагиев Р.М., Алгоритм построения модели Россера для газлифтного процесса при добыче нефти, Proceedings of the Institute of Applied Mathematics, Vol.3, No.2, 2014, с.173-184.
6. Алиев Ф.А., Гасанов К.К., Гулиев А.П., Метод прогонки для решения системы гиперболических уравнений описывающих движениепри добычи нефти, Proceedings of the Institute of Applied Mathematics, Vol.3, No.2, 2014, с.249-255.
7. Алиев Ф.А., Ильясов М.Х., Джамалбеков М.А.., Моделирование работы газлифтной скважины, Доклады НАН Азербайджана, №2, 2008, с.107-115.

8. Алиев Ф.А., Ильясов М.Х., Нуриев Н.Б., Задачи моделирования оптимальной стабилизации газлифтного процесса, Прикладная механика, т. 46, №6, 2010, с.113-122.
9. Алиев Ф.А., Исмаилов Н.А., Задачи оптимизации с периодическим краевым условием и граничным управлением в газлифтных скважинах, Нелинейные колебания, т.17, №2, 2014, с.151-159
10. Алиев Ф.А., Муталлимов М.М., Исмаилов Н.А., Алгоритмы построения оптимальных регуляторов при газлифтной эксплуатации, Автоматика и телемеханика, №8, 2012, с.3-15.
11. Алиев Ф.А., Задача оптимального управления линейной системой с неразделенными двухточечными краевыми условиями, Дифференциальные уравнения, 2, 1986, с.345-347.
12. Алиев, Ф.А., Задача оптимизации с двухточечными краевыми условиями, Известия АН СССР., сер. тех. Кибернетика, 6, 1985, с.138-146.
13. Гайшун И.В., Многопараметрические системы управления, Наука и техника, 1996.
14. Исмаилов Н.А., Муталлимов М.М., Гулиев А.П., Бабаев А.А., Алгоритм построения оптимального дискретного режима скважины, эксплуатируемой газлифтным способом, Вестник Бакинского Университета, серия физико-математических наук, №4, 2010, с. 66-73.
15. Курош А.Г., Курс высшей алгебры, Москва, 1968, 427с.
16. Мирзаджанзаде А.Х., Аметов И.М., Хасаев А.М., Гусев В.И., Технология и механика добычи нефти, Москва, Недра, 1986.
17. Чарный И.А., Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах, М., Гостехиздат, 1951, 389 с.
18. Шуров В.И. Технология и механика добычи нефти. Москва, Недра, 1983.

Boruda hərəkəti təsvir edən rosser tipli tənliklər üçün qovma üsulu

Fikrət Ə. Əliyev, N.A. Əliyev, A.P. Quliyev,
M.F Rəcəbov, R.M Tağıyev

XÜLASƏ

Qazlift üsulu ilə neft istehsalında hərəkəti təsvir edən hiperbolik tənliklər sistemi üçün başlanğıc məsələyə baxılır. Sabit ədədə (ölçü vahidini balanslaşdıran) vurulan mövcud təzyiq və qaz həcminin fərqinə (və ya maye qaz qarışğına) yeni dəyişən daxil etməklə , tənliklər sistemi elə bir tənliklər sisteminə gətirilir ki, uyğun diskretləşmələrdən sonra Rosser tipli diskret tənlik alınır. Qaz həcmində xətti funksiyanın yeni dəyişəinini araşdırarkən , görunür ki, əmisallar 2 birinci növ fərqlər tənliyini ödəyir. Onlardan biri kvadrat tənliyə uyğundur, digəri isə əmsalları birincidən asılı olan birinci növ fərqlər tənliyinə. Daha xüsusi hallarda, zamana və quyu hündürlüyünə görə addım arakəsmələri sıfıra yaxınlaşdıqda qovma əmsalı üçün analitik ifadə, qaz həcmi və təyin oblastın hər nöqtəsində təzyiqi tapmaq mümkünür. Verilən qazın həcmi və başlanğıc şərti sabit olarsa, görünür ki, Rosser modeli ilə alınmış nəticə məşhur nəticə ilə üst-üstə düşür.

Açar sözlər: qaz-lift, hiperbolik tənliklər, diferensial tənliklər, diskretləşmə, Rosser modeli.

Sweep method for solving the Roesser type equation describing the motion in the pipeline

F.A. Aliev, N.A. Aliev, A.P. Kuliev,
M.F. Rajabov, R.M Tagıev.

ABSTRACT

The initial problem for a hyperbolic system of equations describing the motion in the oil production with gas lift method is considered. Introducing the new variable that is the difference of the pressure and the volume of gas (or gas-liquid mixture (GLM)) multiplied by a constant number (measurement balancing unit), the original system of equations is reduced to such a form of equation which, after appropriate discretization, becomes a Rosser type discrete equation. Searching the new variable as a linear function of the volume of gas (or GLM), it is shown that the coefficients satisfy the two difference equations of the first order, one of which corresponds to a quadratic equation and the second is a linear difference equation of the first order whose coefficients depend on the solution of the first one. For a partial case when the steps of time τ and the height h of the well tend to zero the analytical expression for the sweep coefficient is obtained at each point of the domain of definition of the gas volume (or GLM) and the pressure. In the case when the volume of the gas and the motion (initial conditions) are constant at the mouth, it is shown that the results obtained by the Rosser model coincide with the known results where a specific analytical expression is provided for the parameter of the measurement balancing unit.

Keywords: gas lift, hyperbolic equation, difference equations, discretization, model of Roesser.